Задание 59. История о 64 монетах, двух заключённых и одной шахматной доске

Такое длинное название скрывает одну из известных (*в Интернете!*) типичных загадок о заключённых, в которых вы (*да, да, вот именно вы!*) приговорены к длительному заключению и можете спастись, только если докажете свои умственные способности тюремщику. Вы и (*допустим*) ваш друг были заключены в тюрьму. Ваш тюремщик предлагает вам испытание. Если вы его выполните, вы оба будете освобождены.

Правила испытания такие:

Тюремщик отводит вас в отдельную камеру. В камере находятся шахматная доска (8×8) и банка с 64 монетами.

Тюремщик берёт монеты по одной и кладёт их на каждую клетку доски. Он помещает монеты *произвольно* — некоторые будут обращены вверх аверсом, некоторые — реверсом (или все будут аверсом, или реверсом, вы понятия не имеете, всё на усмотрение тюремщика). Если вы попытаетесь вмешаться в процесс раскладки монет, это повлечёт провал испытания.

Если вы попытаетесь принудить, посоветовать или убедить тюремщика любым способом — провал испытания. Вы можете только смотреть.

Когда все монеты будут разложены, тюремщик укажет на одну из клеток и скажет: «Эта!». Указанная клетка — «**магическая**» — ваш ключ к свободе.

Тюремщик разрешит вам перевернуть *одну монету* на доске. Только одну, но это может быть любая монета на ваш выбор. Это единственное изменение, которое вам разрешено сделать в раскладке тюремщика.

Затем вы будете выведены из комнаты. Если вы попытаетесь оставить какие-либо сообщения или подсказки для вашего друга… (*да, вы угадали, провал испытания!*).

Тюремщик приведёт вашего (*допустим*) друга в комнату.

Ваш друг (*ладно друг, так как вы можете спастись только вместе*) должен будет осмотреть доску (*трогать запрещено*) и решить, где, на его взгляд, расположена «**магическая**» клетка.

У него только одна попытка. Исходя из расположения монет, он должен указать на клетку и сказать: «Эта!».

Если он укажет верно, вы оба будете помилованы и немедленно освобождены. Если неверно — вас вернут обратно в камеры и вряд ли дадут еще шанс из них выйти.

Тюремщик объясняет эти правила вам обоим заранее и даёт время посовещаться, чтобы разработать **стратегию**.

Знаете ли Вы (*заключенный*) эту стратегию или отложите испытание на пару лет?

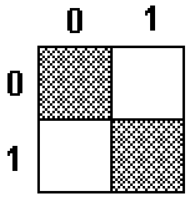
Математики (*и некоторые программисты*) могут сказать вам (*читателю*), что всё, что нам нужно - это доказать, что решение задачи возможно. Если мы сможем закодировать один **бит**[1] информации, используя две клетки, то с помощью **математической индукции,**

[1] **Бит** – единица измерения количества информации. 1 бит информации — символ или сигнал, который может принимать два значения: включено или выключено, да или нет, высокий или низкий, заряженный или незаряженный; в двоичной системе исчисления это 1 (единица) или 0 (ноль). Это минимальное количество информации, которое необходимо для ликвидации минимальной неопределенности.

мы можем подтвердить, что возможно закодировать 2 бита в 4 клетках, 3 — в 8 … 6 битов — в 64 клетках.

Если мы промаркируем клетки шахматной доски от 0 (верхняя левая) до 63 (нижняя правая) в двоичном представлении, мы сможем отобразить, частью какого вложенного множества каждая клетка является.

В качестве примера рассмотрим минимальную квадратную шахматную доску 2×2.



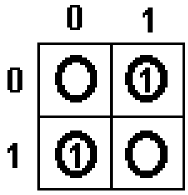
Левая верхняя клетка – 0 (или в двоичном представлении 00).
Правая верхняя клетка – 1 (или в двоичном представлении 01).
Левая нижняя клетка – 2 (или в двоичном представлении 10).
Правая нижняя клетка – 3 (или в двоичном представлении 11).

Разделим доску на различные комбинации двух множеств. Например, первое множество – это клетки, у которых на первом месте двоичного представления находится «1», а второе множество – это клетки, у которых на втором месте двоичного представления находится «1». Применим к этим двум регионам/множествам правило маркировки — будем обозначать, в первом или втором регионе находится «магическая» клетка.

Так как регионы являются **коллекциями** клеток (*они состоят из нескольких клеток*), мы не можем просто повернуть все монеты в регионе аверсом[2]. Вместо этого мы перевернём одну монету. Мы можем посчитать количество аверсов в регионе — если их число будет нечётным, примем это за единицу, если чётным — ноль. Переворачивание одной монеты в регионе изменит число аверсов с нечётного на чётное, и наоборот (прибавление/вычитание единицы к любому числу инвертирует его чётность/нечётность). Таково понятие чётности. Переключение из одного состояния в другое прибавлением или вычитанием одного бита широко используется в компьютерах.

Чтобы изменить чётность региона, нам достаточно перевернуть одну монету в нём.

Перейдем к примерам.



Предположим, что монеты на доске были расположены так, как изображено на рисунке слева. Кружочки с «1» - это монеты, которые лежат аверсом вверх. Посчитаем код такой доски: 1+0=1, 1+0=1, получается «11».

Если «магическая» клетка левая верхняя (00), то надо изменить чётность обоих регионов, перевернув монету на клетке 3.

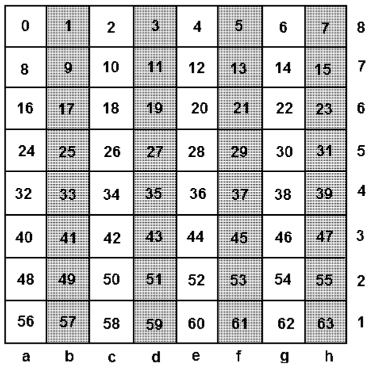
Если «магическая» клетка левая нижняя (10), то надо изменить чётность первого региона, перевернув монету на клетке 1.

Если «магическая» клетка правая нижняя (11), то чётность менять не нужно и для этого можно перевернуть монету на клетке 0.

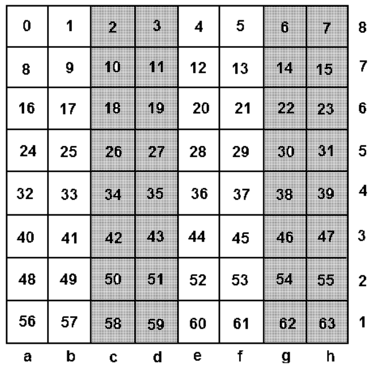
Если «магическая» клетка правая верхняя (01), то надо изменить чётность второго региона, перевернув монету на клетке 2.

Для доски 8×8 используя маски степеней двойки, мы можем разделить доску на регионы несколькими способами. Ниже изображены различные способы разделения доски, основанные на состоянии битов (степени двойки) в номере клетки. Совмещение этих фильтров позволяет определить одну клетку, которую можно перевернуть, чтобы изменить чётность любого/всех битов.

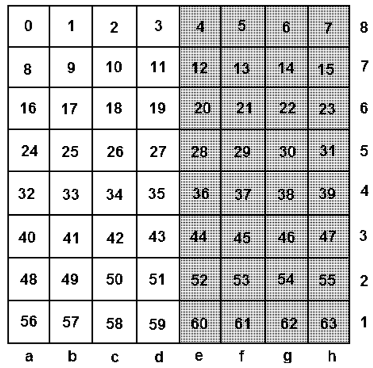
[2] **Аверс** — лицевая, главная сторона монет и медалей, противоположная реверсу. Изначально он обозначал сторону монеты, отчеканенную с использованием нижнего штемпеля (лат.*adversus* — «обращённый лицом»).



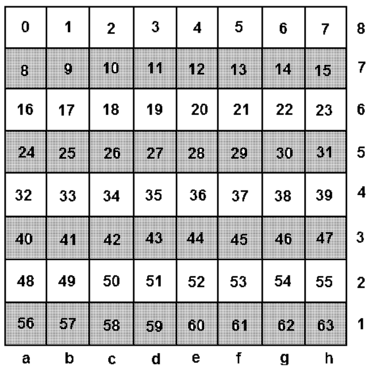
2^0



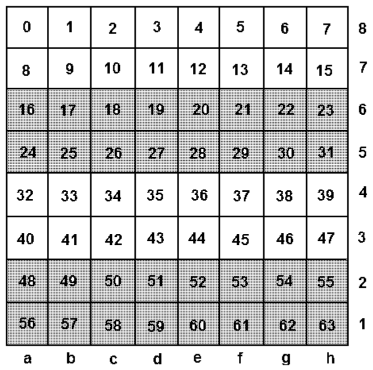
2^1



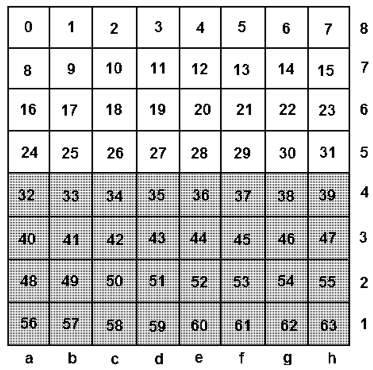
2^2



2^3



2^4

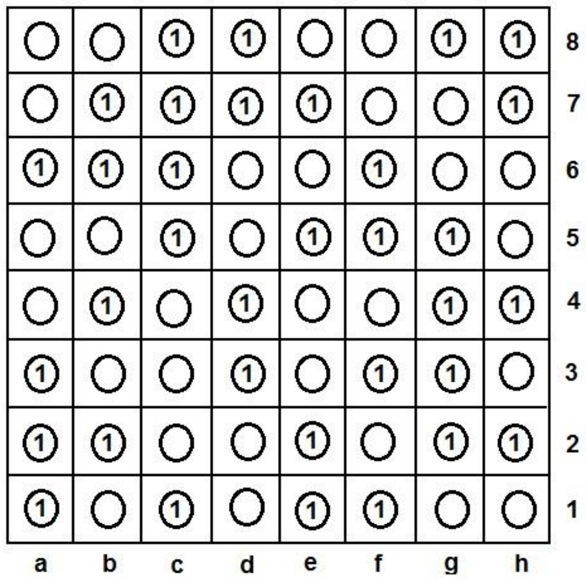


2^5

По определению, каждая клетка имеет уникальный набор битов. Мы можем перевернуть одну монету, чтобы изменить чётность любой комбинации этих фильтров.

Раскладка, созданная тюремщиком, имеет собственную (естественную) чётность. Монеты расположены произвольным образом, и мы можем посчитать чётность (количество аверсов) в каждом регионе. Комбинация этих битов чётности даст нам случайное шестибитное число.

Для идентификации «магической» клетки нам необходимо как раз шесть битов, и мы можем закодировать их с помощью чётности. Мы знаем, что можем перевернуть *одну любую* монету, и это приведёт к изменению одного/нескольких битов числа. Всё, что нам нужно — найти нужную монету, переворачивание которой изменит комбинацию битов чётности таким образом, чтобы получилось необходимое число (двоичная запись номера «магической» клетки).



Пример 59.1. Итак, тюремщик разложил монеты на доске и указал на клетку **С3**.

Какую монету Вы перевернёте?

Ответ: Посчитаем чётность раскладки:

2^0 – 16 аверсов – 0;
2^1 – 18 аверсов – 0;
2^2 – 17 аверсов – 1;
2^3 – 17 аверсов – 1;
2^4 – 17 аверсов – 1;
2^5 – 17 аверсов – 1. Получается 111100.

Нам надо указать на поле С3, то есть поле с номером 42. В двоичном представлении это 101010 (*согласитесь очень похоже на ответ на главный вопрос жизни, вселенной и всего такого*).

Для того, чтобы перейти от раскладки 111100 к раскладке 101010, надо изменить чётность трёх регионов: 2^4, 2^2 и 2^1.

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0

Для этого достаточно перевернуть монету на клетке с номером: $2^4+2^2+2^1=16+4+2=22$. Это поле – **G6**.

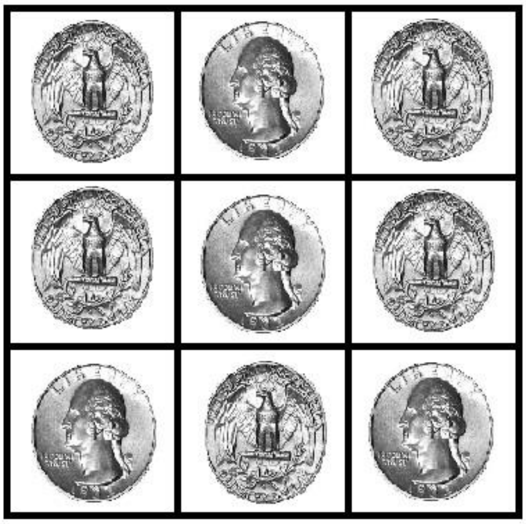
Пример 59.2. Если бы для начального расклада тюремщик указал на клетку G6, то какую монету Вы бы перевернули?

Интересно получилось, да?

Пример 59.3. Найдите для исходного расклада тюремщика парные клетки для углов доски.

Надеюсь, что ответ - **E1**, (*впишите сами*), **D8**, (*впишите сами*) - вас уже не удивляет.

Пример 59.4. Представьте, что вы с другом (*опять?*) попали в похожую ситуацию, но тюремщик оказался не любителем шахмат, а больше специализируется на игре «крестики-нолики», поэтому квадратное поле состоит из 9 клеток (3×3). **Стратегия**, использованная в первой задаче здесь не применима, так как число клеток должно быть равно 2 в какой-то степени. Вы гарантированно можете применить стратегию для восьми (2^3) любых клеток, но есть вероятность (1 к 9), что тюремщик выберет именно девятую клетку в качестве «магической», и тогда – испытание провалено. У вас есть **только пять минут** с другом (*если он у вас, конечно, есть*), чтобы придумать другую 100%-ю **стратегию**. Предположим, тюремщик разложил монеты следующим образом. Какую монету Вы перевернете?



Ответ:

Решение данной задачи не является чисто математической, а скорее является геометрической. Определённой подсказкой должно было стать отсутствие указания в задании на то, какую клетку противник выбрал в качестве «магической». А значит указать на любое поле можно, перевернув только одну монету. Обратим внимание, что размер монеты несколько меньше размеров поля. Поэтому перевернув монету в центре поля, можно выложить ее обратно на центральную клетку доски, сместив в сторону того поля, которое было выбрано «магическим». Монету можно выложить выше точки центра, ниже точки центра, левее точки, правее точки, выше и левее, выше и правее, ниже и левее, ниже и правее, и, конечно же, ровно в центре. Всего девять вариантов. Не благодарите!