Задание 60. Игра «Вращающийся кубик»

В книге[1] была приведена следующая стратегическая игра.

> **Вращаем кубик**. Это стратегическая игра для двух игроков. Первый игрок ставит кубик на стол выбранной стороной вверх. Второй игрок поворачивает кубик на четверть оборота так, что на верхней грани будет уже другое число очков, и прибавляет это число к первому. Затем каждый игрок по очереди вращает кубик на четверть оборота (так можно получить любое число, кроме тех, что расположены на верхней или нижней грани кубика) и прибавляет число очков на верхней грани к общей сумме. Тот, кто набирает в сумме 31, выигрывает.
>
> Какой из игроков имеет преимущество? Как нужно играть, чтобы всегда выигрывать?

Так же без изменений, она приведена в различных открытых уроках по математике (см., например, «*Разработка математического кружка “Математика в игре”*», информатике «*Разработка кружка “Математика и игры”*», и даже в бизнес-тренинге (см., например, «*Телеграм канал “Басов про стартапы”*».

В русскоязычном издании задача находилась в разделе, посвященной игре «Мариенбад», что подразумевало отнесение игры к классу математических игр. Однако, формулировка игры была странной и, возможно, содержит ошибку. В чем проблема? А проблема в том, что выигрыш одного из двух игроков был описан следующей фразой: «*Тот, кто набирает в сумме 31, выигрывает*». Подразумевается, что только в этом случае один из игроков выигрывает, а другой проигрывает. Условие выигрыша в «Мариенбад» звучит похоже - «*Выигрывает игрок, взявший последний предмет*». Но есть ключевое отличие: если в игре, где берут некоторое количество предметов, рано или поздно кто-то из игроков будет вынужден взять последний предмет, то в игре, где происходит суммирование, нет верхнего предела. И игрок, который не может выиграть, и не хочет проигрывать, может заведомо превысить число 31, тем самым, не дав оппоненту возможность выиграть.

Поясним на простом примере. Предположим, умный или хитрый оппонент повернул кубик вверх цифрой «2», добравшись до суммы «29». Выиграть в один ход, мы не можем, так как для достижения суммы «31» необходимо добавить двойку, а двойка занята (**запретный ход**), так как кубик обязательно надо поворачивать. Единственный ход, не превышающий сумму «31» — это добавить «1». Если мы так сделаем, то теперь оппонент будет в состоянии (30; 1), и не будет иметь возможности выиграть. Но никто ему не мешает выбрать любое другое разрешенное число (2, 3, 4, 5) и получить такую сумму, из которой уже не добраться до «31». Тем самым никто из игроков не выиграл, и никто из игроков не проиграл.

Итак, два состояния игры **(29; 2)** и **(30; 1)** являются ничейными, позволяющими избежать поражения или проигрыша. Для суммы 28 такими состояниями игры будут **(28; 3)** и **(28; 4).** Очевидно, что для победы в один ход нужно добавить «3», но если «3» сверху кубика, то такое добавление запрещено, так как кубик необходимо повернуть. А если сверху «4», то цифра «3» запрещена, так как находится на нижней грани кубика, а значит, её невозможно получить за четверть оборота кубика. Все другие состояния (28; 1), (28; 2); (28; 4), (28; 5) являются проигрышными для второго игрока.

Аналогично для суммы 27 такими состояниями игры будут **(27; 3)** и **(27; 4)**. Все другие состояния (27; 1), (27; 2); (27; 5), (27; 6) являются проигрышными для второго игрока.

Сумма 26 также имеет два ничейных состояния – **(26; 2)** и **(26; 5)**. Другие состояния - (26; 1), (26; 3); (26; 4), (26; 6) являются проигрышными для того игрока, который их достигает.

И наконец, последняя сумма 25 также имеет два ничейных состояния – (**25; 1**) и **(25; 6)**. Все остальные состояния (25; 2), (25; 3), (25; 4), (25; 5) проигрывают, как только игрок

[1] Хорди Деулофеу. «Дилемма заключенного и доминантные стратегии. Теория игр», 2014.

из них делает ход – 6.

Теперь рассмотрим игрока с суммой «24», он **не проигрывает** только тогда, когда своим ходом переводит игру не в проигрышное состояние, то есть переводит игру в одно из высших состояний – (25; 1), (25; 6); (26; 2); (26; 5); (27; 3); (27;4); (28; 3); (28; 4); (29; 2); (30;1).

Соответственно, игрок с суммой «24» и будет делать такой не проигрывающий ход.

Потенциально, возможно шесть состояний игры с суммой «24»:

1) (24; 1) можно перевести в состояние (26; 2);
2) (24; 2) можно перевести в состояние (25; 1);
3) (24; 3) можно перевести в состояние (25; 1);
4) (24; 4) можно перевести в состояние (25; 1);
5) (24; 5) можно перевести в состояние (25; 1);
6) (24; 6) можно перевести в состояние (26; 2).

То есть, если будет достигнута сумма «24» (при любом значении кубика), то ни один из игроков уже не победит.

Аналогично можно рассуждать и для суммы «23»:

1) (23; 1) можно перевести в состояние (27; 4);
2) (23; 2) можно перевести в состояние (24; 1);
3) (23; 3) можно перевести в состояние (24; 1);
4) (23; 4) можно перевести в состояние (24; 1);
5) (23; 5) можно перевести в состояние (24; 1);
6) (23; 6) можно перевести в состояние (27; 4).

То есть, если будет достигнута сумма «23» (при любом значении кубика), то ни один из игроков уже не победит.

Для суммы «22»:

1) (22; 1) можно перевести в состояние (24; 2);
2) (22; 2) можно перевести в состояние (23; 1);
3) (22; 3) можно перевести в состояние (23; 1);
4) (22; 4) можно перевести в состояние (23; 1);
5) (22; 5) можно перевести в состояние (23; 1);
6) (22; 6) можно перевести в состояние (24; 2).

То есть, если будет достигнута сумма «22» (при любом значении кубика), то ни один из игроков уже не победит (*и не проиграет*).

Соответственно, из суммы «21» можно безопасно перейти на «22» или «23». И с любого нижерасположенного уровня суммы можно безопасности перейти на два верхних уровня.

Получается, что до суммы ниже «25» можно делать любые ходы без малейшей угрозы проиграть. Согласитесь, странная игра!

Всё существенно меняется, если исправить условие победы на «*Тот, кто набирает в сумме 31 и больше, выигрывает*».

В этом случае можно определить **состояния игры** как «Выигрышные» или «Проигрышные».

Для любой суммы от 26 до 30 все состояния игры являются «Проигрышными» и в таблице мы (*то есть я и ты!*) обозначим их знаком «-».

Сумма	Значение на верхней грани кубика					
	1	2	3	4	5	6
30	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-

Действительно, при любом состоянии кубика к сумме можно добавить или «5», или «6» (*одновременно эти два числа не могут быть запретными*) и получить соответственно 31 или больше. То есть, выбирая любое из этих состояний, **игрок** проигрывает.

Для суммы 25 выигрывающим ходом должно стать грань кубика с цифрой «6», значит любое состояние игры, в котором выбор «6» не запрещён, будет **проигрывающим**. Цифра «6» является запретной для состояния «1» и «6». Для «1» - запретная цифра, так как «6» находится на противоположной грани кубика и в четверть оборота её не достигнуть. Для «6» - это запретная цифра, так как кубик необходимо повернуть. Таким образом, состояния игры (25; 1) и (25; 6) являются **выигрышными состояниями**. Приводя игру в такое состояние, игрок вынуждает оппонента изменить состояние игры на **проигрывающее**, и выиграть следующим поворотом. Обозначим такие состояния знаком «В».

Сумма	Значение на верхней грани кубика					
	1	2	3	4	5	6
30	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-
25	В	-	-	-	-	В

Рассуждаем дальше. Если из какого-то **состояния игру** можно перевести **только** (!) в **проигрышные** состояния, то **состояние игры** является **выигрышным** для того игрока, которые его создаёт. Если это не так, то **состояние игры** является **проигрышным**.

Так, например, все состояния игры (24; 2), (24; 3), (24; 4), (24; 5) можно перевести в выигрышное состояние (25; 1), повернув кубик на «1», а значит, все эти состояния являются проигрышными. Состояния же (25; 1) и (25; 6) могут привести только к проигрышным состояниям, а значит, они являются выигрышными, для того игрока, который их создаёт.

Уменьшая сумму дальше вниз, мы определяем характеристику каждого состояния игры. Ниже в таблице добавляется еще один значок «н», означающий, что такого состояния игры не существует. Например, состояние (5; 6) невозможно, так как сумма, содержащая цифру «6» не может быть меньше «6» в реальном мире. Интересно, что даже невозможные состояния, тем не менее, могут характеризоваться как «проигрышные» или «выигрышные».

Сумма	Значение на верхней грани кубика					
	1	2	3	4	5	6
30	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-
25	В	-	-	-	-	В
24	В	-	-	-	-	В
23	В	-	-	-	-	В
22	В	-	-	-	-	В
21	В	-	-	-	-	В
20	В	-	-	-	-	В
19	В	-	-	-	-	В
18	В	-	-	-	-	В
17	В	-	-	-	-	В
16	В	-	-	-	-	В
15	В	-	-	-	-	В
14	В	-	-	-	-	В
13	В	-	-	-	-	В
12	В	-	-	-	-	В
11	В	-	-	-	-	В
10	В	-	-	-	-	В
9	В	-	-	-	-	В
8	В	-	-	-	-	В
7	В	-	-	-	-	В
6	В	-	-	-	-	В
5	В	-	-	-	-	н
4	В	н	-	-	н	н
3	В	-	-	н	н	н
2	н	-	н	н	н	н
1	В	н	н	н	н	н

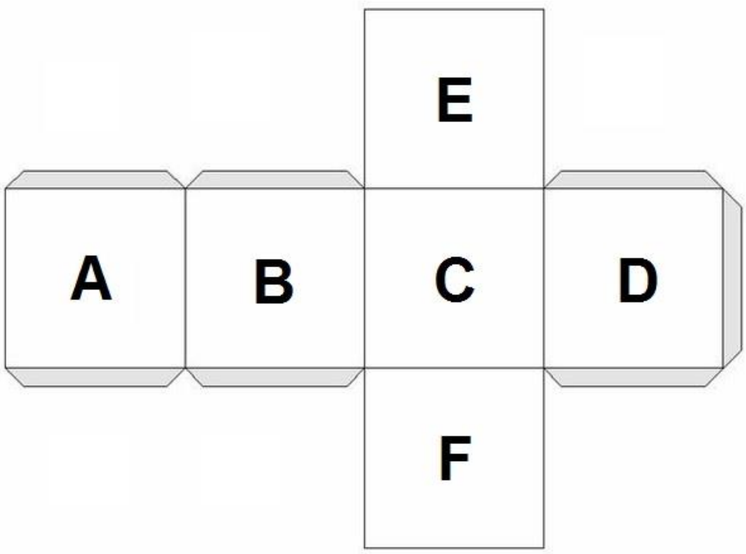
Исходя из представленной таблицы, выигрышная стратегия для первого игрока состоит в выставлении кубика с верхней цифрой «1» или «6», и последующие повороты кубика на «1» или «6», пока сумма не превышает «25».

<u>Пример партии</u>:

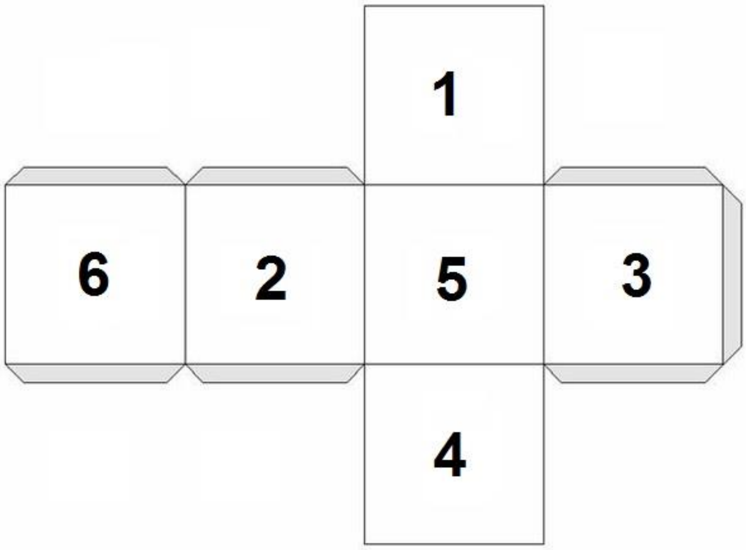
Первый игрок	Сумма	Второй игрок	Сумма
	6		10
	16		19
	25		28
	33	Первый игрок выиграл	

Стоит заметить, что число «31» взято крайне произвольно. Стратегия игры принципиально не отличалась бы при выборе числа «101» или «1001».

Лучшая модификация игры заключается в следующем. Обозначим грани кубика буквами «A», «B», «C», «D», «E», «F».



Возьмём шесть карточек, на которых написаны цифры «1», «2», «3», «4», «5» и «6». Будем перемешивать эту колоду и доставать из неё по одной карточке. На грани в порядке ряда букв наносит ту цифру, которая оказалась на карточке. При этом получается кубик с нестандартным расположением цифр. Например, у меня получилось такое.



Найдите для приведенной выше развертки кубика **выигрышную стратегию** в следующей (аналогичной игре). Первый игрок ставит кубик на стол выбранной стороной вверх. Второй игрок поворачивает кубик на четверть оборота так, что на верхней грани будет уже другое число очков, и прибавляет это число к первому. Затем каждый игрок по очереди вращает кубик на четверть оборота, и прибавляет число очков на верхней грани к общей сумме. Тот, кто набирает в сумме 31 и больше, выигрывает.